Задачи к зачету по курсу
"Теория случайных процессов"

1. Для случайного процесса с независимыми и однородными по времени приращениями вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

2. Случайный процесс $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где ω- неслучайная константа, A φ независимы, $\mathbf{M}(A) = m, \mathbf{D}(A) = \sigma^2, \varphi$-равномерно распределена на опрезке $[0, \pi]$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\xi(t)$. Доказать, что это стационарный в широком смысле случайный процесс.

3. Пусть $W(t)$-стандартный винеровский процесс. Доказать, что он непрерывен в среднем квадратическом, но не является дифференцируемым в среднем квадратическом.

4. $\xi(t)$-пуассоновский процесс, $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\eta(t)$.

5. Пусть $W(t)$-стандартный винеровский процесс. $\xi_1 = \int_0^\pi \cos(t)dW(t)$,
$\xi_2 = \int_0^\pi \sin(t)dW(t)$. Найти: $M(\xi_1), M(\xi_2), D(\xi_1), D(\xi_2), Cov(\xi_1, \xi_2)$.

6. Корреляционная функция стационарного процесса равна $R(\tau) = \exp(-\tau^2)$. Найти спектральную плотность $f(\lambda)$. Обратно, дана спектральная плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$, найти $K(\tau)$.

7. Пусть $W(t)$-стандартный винеровский процесс, $h(\tau) = \exp(-\tau)$,
$\tau > 0, \xi(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)W(s)ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для такого процесса. То же самое для процесса $\eta(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)dW(s)$.

8. Случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = -\xi(t)dt + d\eta(t),\ t \geq 0.$$

Найти общий вид решения этого уравнения.

9. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \exp(-|\lambda|)$. Доказать, что этот процесс является дифференцируемым в среднем квадратическом и найти корреляционную функцию для производной.

10. При движении по некоторому лабиринту Вы в первый раз равновероятно сворачиваете либо налево, либо направо. Далее на каждой развилке Вы с вероятностью 0.7 сворачиваете туда же, что и в предыдущий раз, а с вероятностью 0.3

в противоположную сторону. Какова вероятность того, что вы свернете налево

а) на третьей развилке,

б) на 1000-ой развилке?

11. Пусть цепь Маркова с непрерывным временем имеет два состояния и следующую матрицу интенсивностей перехода

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Используя уравнения Колмогорова, найти вероятности перехода $P_{ij}(t), t \geq 0$.

12. Найти наилучшую линейную оценку для случайной величины η в пространстве случайных величин $L = \{\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2\}$, где $\xi_1 \;\; \xi_2$ -фиксированные случайные величины, $\alpha_1, \alpha_2 \in R^1$. $M(\xi_1) = M(\xi_2) = M(\eta) = 0$. $D(\xi_1) = D(\eta) = 1,\ D(\xi_2) = 4,\ Cov(\xi_1, \xi_2) = -1,\ Cov(\xi_1, \eta) = 0.5,\ Cov(\xi_2, \eta) = 1.$

13. Случайный процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифферncиал вида

$$d\xi(t) = \theta(t)dt + d\eta(t),\ t \geq 0,$$

где $\theta(t) = \alpha_1 \cos(t) + \alpha_2 \sin(t)$. Написать, как выглядят оптимальные линейные оценки для α_1 и α_2.